

## B. Hydrodynamik

### B.1 Massenbilanz

§1. Im letzten Kapitel wurde festgestellt, dass hydrodynamisches Verhalten, d.h. auf langen Zeit- und großen Längenskalen, für erhaltene Dichten erwartet werden kann.

Die einfachste erhaltene Dichte ist die Massendichte  $\rho_m(\vec{r}, t)$ .

Zur Zeit  $t$  sei ein beliebiges Teilvolumen  $W(t) \subset V$  gewählt.

Die Strömung transportiert die Flüssigkeit zur Zeit  $t$  in  $W(t)$  innerhalb des Zeitintervalls  $\Delta t$  in das Teilvolumen  $W(t+\Delta t) \subset V$ .

Da beide Teilvolumina  $W(t)$  und  $W(t+\Delta t)$  die gleichen Flüssigkeitsteilchen enthalten und da keine Masse erzeugt wird, gilt

$$\int_{W(t+\Delta t)} d^d r \rho_m(\vec{r}, t+\Delta t) = \int_{W(t)} d^d r \rho_m(\vec{r}, t). \quad (1)$$

§2. Die Flüssigkeitsströmung werde in der sogenannten Euler-Darstellung durch das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ , d.h. die Strömungsgeschwindigkeit am Ort  $\vec{r}$  zur Zeit  $t$ , beschrieben.

Diese Strömung transportiert demnach Flüssigkeitsteilchen, die sich zur Zeit  $t$  am Ort  $\vec{r}$  befinden innerhalb des Zeitintervalls  $\Delta t$  an den Ort  $T_{t, \Delta t} \vec{r}$ , wobei

$T_{t, \Delta t}: V \rightarrow V$  ein Operator auf dem Systemvolumen ist.

Für kleine Zeitintervalle  $\Delta t$  ist

$$T_{t, \Delta t} \vec{r} = \vec{r} + \Delta t \vec{v}(\vec{r}, t) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (2)$$

Die Einträge der Jacobi-Matrix  $\underline{J}$  von  $T_{t,\Delta t}$  lauten dann

$$J_{ij} = \frac{\partial T_{t,\Delta t} r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij} + \Delta t \frac{\partial v_i(\vec{r}_i, t)}{\partial r_j} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3)$$

und daher ist

$$\det(\underline{J}) = \det \begin{pmatrix} 1 + \Delta t \frac{\partial v_1}{\partial r_1} + \mathcal{O}(\Delta t^2) & \Delta t \frac{\partial v_1}{\partial r_2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) & \dots & \Delta t \frac{\partial v_1}{\partial r_d} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ \Delta t \frac{\partial v_2}{\partial r_1} + \mathcal{O}(\Delta t^2) & 1 + \Delta t \frac{\partial v_2}{\partial r_2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) & \dots & \Delta t \frac{\partial v_2}{\partial r_d} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta t \frac{\partial v_d}{\partial r_1} + \mathcal{O}(\Delta t^2) & \Delta t \frac{\partial v_d}{\partial r_2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) & \dots & 1 + \Delta t \frac{\partial v_d}{\partial r_d} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \Delta t \left( \frac{\partial v_1}{\partial r_1} + \frac{\partial v_2}{\partial r_2} + \dots + \frac{\partial v_d}{\partial r_d} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$= 1 + \Delta t \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}_i, t) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (4)$$

§3. Die Massenerhaltung in  $G_t(1)$  führt mit  $W(t+\Delta t) = T_{t,\Delta t} W(t)$

und Gln. (2) und (4) auf

$$\int_{W(t+\Delta t)} d^d r \, \rho_m(\vec{r}, t+\Delta t) = \int_{W(t)} d^d r \, |\det \underline{J}(\vec{r}_i, t)| \rho_m(T_{t,\Delta t} \vec{r}, t+\Delta t)$$

$$= \int_{W(t)} d^d r \left( 1 + \Delta t \frac{\partial v_i(\vec{r}_i, t)}{\partial r_i} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right) \left( \rho_m(\vec{r}_i, t) + \Delta t v_j(\vec{r}_i, t) \frac{\partial \rho_m(\vec{r}_i, t)}{\partial r_j} + \Delta t \frac{\partial \rho_m(\vec{r}_i, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right)$$

$$= \int_{W(t)} d^d r \left( \rho_m(\vec{r}_i, t) + \Delta t \left( \rho_m(\vec{r}_i, t) \frac{\partial v_i(\vec{r}_i, t)}{\partial r_i} + v_i(\vec{r}_i, t) \frac{\partial \rho_m(\vec{r}_i, t)}{\partial r_i} + \frac{\partial \rho_m(\vec{r}_i, t)}{\partial t} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right)$$

$$\stackrel{!}{=} \int_{W(t)} d^d r \, \rho_m(\vec{r}_i, t). \quad (5)$$

Für  $\Delta t \rightarrow 0$  und  $W(t) \rightarrow 0$  folgt aus Gl. (5) die lokale Kontinuitätsgleichung

$$\rho_m(\vec{r}, t) \frac{\partial v_i}{\partial r_i}(\vec{r}, t) + v_i(\vec{r}, t) \frac{\partial \rho_m}{\partial r_i}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \underbrace{\rho_m(\vec{r}, t) v_i(\vec{r}, t)}_{=: j_{mi}(\vec{r}, t)} \right) \quad (7)$$

mit der Massenstromdichte  $\vec{j}_m(\vec{r}, t)$ .

§4. Eine inkompressible Flüssigkeit ist definiert durch  $\rho_m(\vec{r}, t) = \text{const}$ , was sich mit Gl. (7) als

$$\text{div } \vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\partial v_i}{\partial r_i}(\vec{r}, t) = 0 \quad (8)$$

formulieren lässt.

## B.2 Impulsbilanz

§1. Eine zu § B.1.3 analoge Rechnung für die Impulsdichte  $\rho_m(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$  liefert

$$\begin{aligned} & \int_{W(t+\Delta t)} d^d r \rho_m(\vec{r}, t+\Delta t) v_i(\vec{r}, t+\Delta t) \\ &= \int_{W(t)} d^d r \left( 1 + \Delta t \frac{\partial v_j}{\partial r_j}(\vec{r}, t) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right) \left( \rho_m(\vec{r}, t) + \Delta t \left( v_k(\vec{r}, t) \frac{\partial \rho_m}{\partial r_k}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\vec{r}, t) \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right) \\ & \quad \left( v_i(\vec{r}, t) + \Delta t \left( v_l(\vec{r}, t) \frac{\partial v_i}{\partial r_l}(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_i}{\partial t}(\vec{r}, t) \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right) \\ &= \int_{W(t)} d^d r \left( \rho_m(\vec{r}, t) v_i(\vec{r}, t) + \Delta t \left( \rho_m(\vec{r}, t) v_i(\vec{r}, t) \frac{\partial v_j}{\partial r_j}(\vec{r}, t) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. v_i(\vec{r}, t) \left( v_k(\vec{r}, t) \frac{\partial \rho_m}{\partial r_k}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\vec{r}, t) \right) + \rho_m(\vec{r}, t) \left( v_l(\vec{r}, t) \frac{\partial v_i}{\partial r_l}(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_i}{\partial t}(\vec{r}, t) \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Daher ist die Impulsänderung in  $\Omega(t)$  gegeben durch

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d^d r \, \rho_m(\vec{r}, t) v_i(\vec{r}, t) \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega(t+\Delta t)} d^d r \, \rho_m(\vec{r}, t+\Delta t) v_i(\vec{r}, t+\Delta t) - \int_{\Omega(t)} d^d r \, \rho_m(\vec{r}, t) v_i(\vec{r}, t) \right) \\
 &= \int_{\Omega(t)} d^d r \left( v_i(\vec{r}, t) \underbrace{\left( \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_j} (\rho_m(\vec{r}, t) v_j(\vec{r}, t)) \right)}_{=0 \text{ (G. (B.1.7))}} \right. \\
 & \quad \left. + \rho_m(\vec{r}, t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial t}(\vec{r}, t) + v_j(\vec{r}, t) \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) \right) \right). \quad (2)
 \end{aligned}$$

§2. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz ist die Impulsänderung in G. (2) gleich der auf  $\Omega(t)$  wirkenden Kraft.

Diese besitzt, vom Standpunkt der Hydrodynamik aus,

- einen Volumenanteil  $\int_{\Omega(t)} d^d r \, f_i(\vec{r}, t)$  mit einer Kraftdichte  $f_i(\vec{r}, t)$ , und
- einen Oberflächenanteil  $\int_{\partial\Omega(t)} d^{d-1} r \, \sigma_{ij}(\vec{r}, t) n_j(\vec{r})$  mit dem

Spannungstensor  $\sigma_{ij}(\vec{r}, t)$  und dem äußeren Normaleneinheitsvektor  $n_j(\vec{r})$  bei  $\vec{r} \in \partial\Omega(t)$ .

Gleichung (2) führt dann auf

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega(t)} d^d r \, \rho_m(\vec{r}, t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial t}(\vec{r}, t) + v_j(\vec{r}, t) \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) \right) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d^d r \, \rho_m(\vec{r}, t) v_i(\vec{r}, t) \\
 &= \int_{\Omega(t)} d^d r \, f_i(\vec{r}, t) + \int_{\partial\Omega(t)} d^{d-1} r \, \sigma_{ij}(\vec{r}, t) n_j(\vec{r}) \\
 &= \int_{\Omega(t)} d^d r \, f_i(\vec{r}, t) + \int_{\Omega(t)} d^d r \, \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j}(\vec{r}, t), \quad (3)
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Gaußsche Integralsatz verwendet wurde.

Für  $W(t) \rightarrow 0$  folgt dann

$$\sum_i (\vec{r}, t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} (\vec{r}, t) + v_j (\vec{r}, t) \frac{\partial v_i}{\partial r_j} (\vec{r}, t) \right) = f_i (\vec{r}, t) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} (\vec{r}, t). \quad (4)$$

§3. Der Spannungstensor  $\sigma_{ij} (\vec{r}, t)$  in Gl. (4) setzt sich zusammen aus einem Beitrag durch den Druck  $p$  und einem Beitrag durch Reibungskräfte von relativ zueinander bewegter Flüssigkeitsschichten:

$$\sigma_{ij} (\vec{r}, t) = -p (\vec{r}, t) \delta_{ij} + \sigma'_{ij} (\vec{r}, t), \quad (5)$$

wobei  $\sigma'_{ij}$  als Reibungstensor bezeichnet wird.

§4. Es soll hier angenommen werden, dass die Komponenten  $\frac{\partial v_i}{\partial r_j} (\vec{r}, t)$  des Gradienten des Geschwindigkeitsfelds klein genug sind, sodass der lineare Zusammenhang

$$\sigma'_{ij} (\vec{r}, t) = A_{ijke} \frac{\partial v_k}{\partial r_e} (\vec{r}, t) \quad (6)$$

besteht.

Das Tensorfeld 4. Stufe  $A_{ijke}$  beschreibt die Viskosität der Flüssigkeit, die als unabhängig von  $\vec{r}$  und  $t$  angenommen wird.

In einer isotropen Flüssigkeit ist  $A_{ijke}$  von der allgemeinen Form (siehe Übungen):

$$A_{ijke} = a \delta_{ij} \delta_{ke} + b \delta_{ik} \delta_{je} + c \delta_{ie} \delta_{jk} \quad (7)$$

Daher ist

$$\sigma'_{ij} (\vec{r}, t) = a \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial r_k} (\vec{r}, t) + b \frac{\partial v_i}{\partial r_j} (\vec{r}, t) + c \frac{\partial v_j}{\partial r_i} (\vec{r}, t) \quad (8)$$

Für eine gleichmäßig rotierende Flüssigkeit mit Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} (\vec{r}, t) = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9)$$

ist

$$\frac{\partial v_k}{\partial r_k} = \frac{\partial}{\partial r_k} \varepsilon_{klm} \omega_l r_m = \varepsilon_{klm} \omega_l \delta_{mk} = \varepsilon_{kllk} \omega_l = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial r_j} = \frac{\partial}{\partial r_j} \varepsilon_{ilm} \omega_l r_m = \varepsilon_{ilm} \omega_l \delta_{mj} = \varepsilon_{ilj} \omega_l = -\varepsilon_{ijl} \omega_l \quad (11)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i} \varepsilon_{jlm} \omega_l r_m = \varepsilon_{jlm} \omega_l \delta_{mi} = \varepsilon_{jli} \omega_l = \varepsilon_{ijl} \omega_l \quad (12)$$

also

$$\sigma'_{ij}(\vec{r}, t) = (c-b) \varepsilon_{ijl} \omega_l. \quad (13)$$

In einer gleichmäßig rotierenden Flüssigkeit treten aber keine Reibungskräfte auf, sodass aus Gl. (13)

$$b = c \quad (14)$$

folgt.

Demnach lautet der Reibungstensor einer isotropen Flüssigkeit

$$\sigma'_{ij}(\vec{r}, t) = a \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial r_k}(\vec{r}, t) + b \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}(\vec{r}, t) \right). \quad (15)$$

Man bezeichnet die Konstanten in Gl. (15) typischerweise als

$$a := \lambda - \frac{2}{d} \eta, \quad b = \eta, \quad (16)$$

wobei  $\eta$  die Scherviskosität und  $\lambda$  die Volumenviskosität heißen.

Der Reibungstensor einer isotropen Flüssigkeit ist schließlich durch

$$\sigma'_{ij}(\vec{r}, t) = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}(\vec{r}, t) - \frac{2}{d} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial r_k}(\vec{r}, t) \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial r_k}(\vec{r}, t) \quad (17)$$

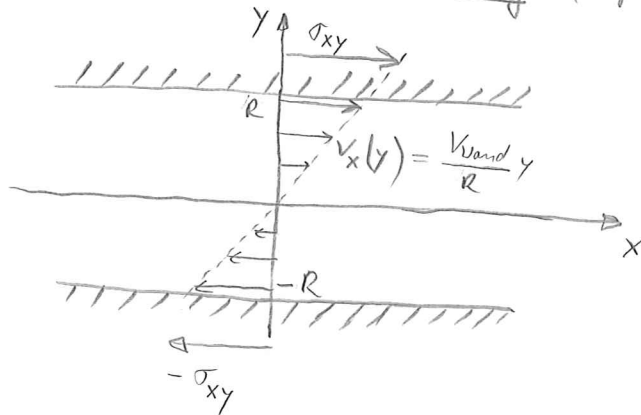
gegeben.

§5. Für eine inkompressible Flüssigkeit ist nach Gl. (B.1.8)

$\frac{\partial v_k}{\partial r_k}(\vec{r}, t) = 0$  und der Reibungstensor vereinfacht sich zu

$$\sigma'_{ij}(\vec{r}, t) = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}(\vec{r}, t) \right) \quad (18)$$

§6. Für eine einfache Scherströmung (vgl. §A.1.4)



ist die Reibungskraft pro Wandfläche für eine Wandgeschwindigkeit  $v_{wand}$  durch

$$\sigma'_{xy} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \eta \frac{v_{wand}}{R} \quad (19)$$

gegeben.

Die Scherviskosität  $\eta$  bestimmt das Verhältnis zwischen Reibungskraft pro Wandfläche  $\sigma'_{xy}$  und Geschwindigkeitsgradient  $\frac{v_{wand}}{R}$ .

§7. Aus Gln. (4), (5) und (18) folgt für inkompressible Flüssigkeiten die Navier-Stokes-Gleichung

$$\text{Sm} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{r}, t) + (\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t) \right) = -\vec{\nabla} p(\vec{r}, t) + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}(\vec{r}, t) + \vec{f}(\vec{r}, t) \quad (20)$$

mit der sogenannten substantiellen Ableitung

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \quad (21)$$

nimmt sie die Form

$$\sum_m \frac{D\vec{v}}{Dt}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}p(\vec{r}, t) + \gamma \vec{\nabla}^2 \vec{v}(\vec{r}, t) + \vec{f}(\vec{r}, t) \quad (22)$$

an, die als hydrodynamisches Analogon zum 2. Newtonschen Gesetz gesehen werden kann: Die „Beschleunigung“ auf der linken Seite ergibt sich aus dem Einfluss der „Druckkraft“  $-\vec{\nabla}p$ , der „Reibungskraft“  $\gamma \vec{\nabla}^2 \vec{v}$  und der „Volumenkraft“  $\vec{f}$ .

§8. Die kinetische Energie einer inkompressiblen Flüssigkeit ist gegeben durch

$$E_{kin}(t) = \frac{\sum_m}{2} \int_V d^d r \vec{v}(\vec{r}, t)^2 \quad (23)$$

Sie ändert sich zeitlich gemäß

$$\frac{d}{dt} E_{kin}(t) = \sum_m \int_V d^d r v_i(\vec{r}, t) \frac{\partial v_i}{\partial t}(\vec{r}, t)$$

$$\stackrel{\text{Gln. (4), (5)}}{=} \int_V d^d r v_i(\vec{r}, t) \left( -\sum_m v_j(\vec{r}, t) \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) + f_i(\vec{r}, t) - \frac{\partial p}{\partial r_i}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial r_j}(\vec{r}, t) \right)$$

$$= \int_V d^d r \left( -v_i(\vec{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \frac{\sum_m}{2} \vec{v}(\vec{r}, t)^2 + p(\vec{r}, t) \right) + v_i(\vec{r}, t) f_i(\vec{r}, t) + v_i(\vec{r}, t) \frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial r_j}(\vec{r}, t) \right)$$

$$\stackrel{\frac{\partial v_i}{\partial r_i} = 0}{=} \int_V d^d r \left( \frac{\partial}{\partial r_i} \left( -v_i(\vec{r}, t) \left( \frac{\sum_m}{2} \vec{v}(\vec{r}, t)^2 + p(\vec{r}, t) \right) \right) + \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{f}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_j} \left( v_i(\vec{r}, t) \sigma_{ij}'(\vec{r}, t) \right) - \sigma_{ij}'(\vec{r}, t) \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) \right)$$



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\text{kin}}(t) = & - \int_{\partial V} d^{d-1} r \left( \left( \frac{\rho_m}{2} \vec{v}(\vec{r}, t)^2 + p(\vec{r}, t) \right) v_j(\vec{r}, t) - v_i(\vec{r}, t) \sigma'_{ij}(\vec{r}, t) \right) n_j(\vec{r}, t) \\ & + \int_V d^d r \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{f}(\vec{r}, t) - \int_V d^d r \sigma'_{ij}(\vec{r}, t) \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (24)$$

Das Oberflächenintegral auf der rechten Seite beschreibt die Änderung der kinetischen Energie auf Grund von Wechselwirkungen mit den Wänden und das erste Volumenintegral ist die Änderung auf Grund eines externen Kraftfelds.

Demnach quantifiziert das zweite Volumenintegral in Gl. (24) die Dissipation auf Grund von Reibung (Viskosität). Sind die Wände (und damit auch die Flüssigkeit dort) in Ruhe und wirkt kein externes Kraftfeld, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\text{kin}}(t) = & - \int_V d^d r \underbrace{\sigma'_{ij}(\vec{r}, t) \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t)} \\ = & \gamma \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}(\vec{r}, t) \right) \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) \\ = & \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}(\vec{r}, t) \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}(\vec{r}, t) \right) \\ = & - \frac{\gamma}{2} \int_V d^d r \sum_{ij} \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}(\vec{r}, t) \right)^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Da Dissipation zur Verringerung der kinetischen Energie führt, d.h.  $\frac{d}{dt} E_{\text{kin}}(t) < 0$ , und da das Integral in Gl. (25) positiv ist, muss die Scherviskosität stets positiv sein:

$$\gamma > 0. \quad (26)$$

§9. Die Navier-Stokes-Gleichung Gl. (22) für das Geschwindigkeitsprofil  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  ist für bestimmte, die physikalische Situation charakterisierende Randbedingungen zu lösen.

An Wänden liegen typischerweise sogenannte no-slip boundary conditions vor, d.h. die Flüssigkeit an den Wänden gleitet nicht, sondern sie ist relativ zu diesen in Ruhe.

§10. Für eine stationäre Strömung gilt

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{r}, t) = 0, \quad (27)$$

woraus für inkompressible Flüssigkeiten die Navier-Stokes-Gleichung (vgl. Gl. (20))

$$\rho_m (\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} p(\vec{r}) + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}(\vec{r}) + \vec{f}(\vec{r}) \quad (28)$$

folgt.

§11. Ist die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  von der Größenordnung  $|\vec{v}(\vec{r}, t)| \approx U$  und ändert sich  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  typischerweise auf Längenskalen  $L \approx \frac{U}{|\vec{\nabla} \vec{v}(\vec{r}, t)|}$ , so ist

$$|\rho_m (\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t)| \approx \frac{\rho_m U^2}{L}, \quad (29)$$

$$|\eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}(\vec{r}, t)| \approx \frac{\eta U}{L^2}. \quad (30)$$

Das Verhältnis der rechten Seiten nennt man die Reynolds-Zahl

$$Re := \frac{UL}{\eta/\rho_m}. \quad (31)$$

Für große Reynolds-Zahlen ( $Re \gg 1$ ) ist

$$|\rho_m (\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t)| \gg |\gamma \vec{\nabla}^2 \vec{v}(\vec{r}, t)|, \quad (32)$$

woraus aus Gl. (20) die Eulersche Gleichung

$$\rho_m \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{r}, t) + (\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t) \right) = -\vec{\nabla} p(\vec{r}, t) + \vec{f}(\vec{r}, t) \quad (33)$$

für ideale Flüssigkeiten folgt.

Für kleine Reynolds-Zahlen ( $Re \ll 1$ ) ist

$$|\rho_m (\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t)| \ll |\gamma \vec{\nabla}^2 \vec{v}(\vec{r}, t)|, \quad (34)$$

was zur Stokeschen Gleichung

$$\rho_m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} p(\vec{r}, t) + \gamma \vec{\nabla}^2 \vec{v}(\vec{r}, t) + \vec{f}(\vec{r}, t) \quad (35)$$

führt.

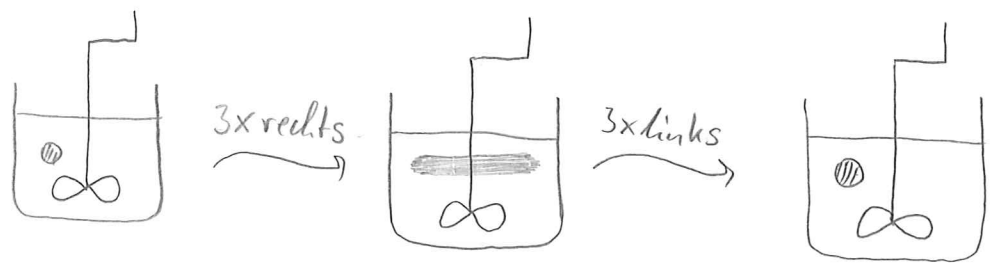
Bemerkungen:

- Gleichung (32) ist gewöhnlich nicht überall in  $\vec{r} \in V$  erfüllt, z. B. nicht in unmittelbarer Nähe von ruhenden Wänden.

Eine Anwendung der Eulerschen Gleichung auf das gesamte Systemvolumen  $V$  ist daher gewöhnlich eine Näherung.

- Im Gegensatz zur Eulerschen Gleichung Gl. (33) ist die Stokesche Gleichung Gl. (35) linear in  $\vec{v}(\vec{r})$ .

Dies hat u.a. zur Folge, dass die Durchmischung einer Flüssigkeit bei kleinen Reynolds-Zahlen reversibel ist:



Experiment nach G.I. Taylor, siehe z.B.

<http://www.youtube.com/watch?v=5A-6QCJTAjU>

PhsmOc7Hb8Q

AwNmtle6qkE

- Das Verhältnis

$$\nu := \frac{\eta}{\rho_m} \quad (36)$$

heißt kinematische Viskosität und die Shearviskosität  $\eta$  wird in diesem Zusammenhang auch dynamische Viskosität genannt.

Bei 20°C betragen dynamische und kinematische Viskosität

$$\eta = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}, \quad \nu = 1,00 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \text{ für Wasser,}$$

$$\eta = 1,837 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}, \quad \nu = 1,51 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \text{ für Luft.}$$

Nach Gl. (31) ist

$$Re \geq 1 \Leftrightarrow UL \geq \frac{\eta}{\rho_m} = \nu. \quad (37)$$

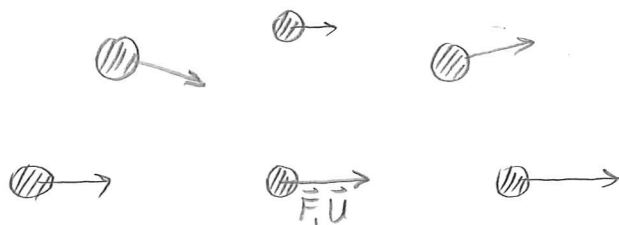
Hieran erkennt man, dass makroskopische Strömungen von Wasser und Luft ( $U \gtrsim 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, L \gtrsim 1 \text{m}$ ) mit der Euler-Gleichung beschrieben werden können, während für Strömungen im mesoskopischen Bereich, z.B. beim Fortbewegen von Einzelkern ( $U \lesssim 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}, L \lesssim 1 \mu\text{m}$ ), die Stokesche Gleichung zu benutzen ist.

### B.3 Hydrodynamische Wechselwirkung

§1. In diesem Abschnitt soll die folgende Situation untersucht werden:

Kolloidale Teilchen sind in einem Lösungsmittel mit kinematischer Viskosität  $\nu = \frac{\eta}{\rho_m}$  suspendiert. Zur Zeit  $t < 0$  ruht das Lösungsmittel und die Kolloide. Zur Zeit  $t \geq 0$  wird dann eines der Kolloide mit Hilfe einer Kraft  $\vec{F}$  so durch das Lösungsmittel gezogen, dass es sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit  $\vec{U}$  bewegt.

Das gezogene Kolloid erzeugt ein Stömungsfeld, in dem sich die anderen Kolloide bewegen. Diese durch das Lösungsmittel vermittelte Wechselwirkung zwischen zwei Kolloiden nennt man hydrodynamische Wechselwirkung.



§2. Wie für kolloidale Suspensionen typisch werden kleine Reynolds-Zahlen ( $Re \ll 1$ ) angenommen.

Dies bedeutet, dass für das Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \hat{v}(\vec{q}, t) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \quad (1)$$

nur diejenigen Moden  $\vec{q}$  relevant sind, d.h.  $\hat{v}(\vec{q}, t) \neq 0$ , für die

$$\frac{|\vec{U}|}{\nu |\vec{q}|} \ll Re \ll 1 \Leftrightarrow |\vec{q}| \gg \frac{|\vec{U}|}{\nu} =: \frac{1}{L} \quad (2)$$

gilt.

Für diese Moden kann die Stokesche Gleichung verwendet werden (vgl. §B.2.m), die dann in der Form

$$\text{Sum} \frac{\partial \hat{\vec{v}}(\vec{q}, t)}{\partial t} = -i \vec{q} \hat{p}(\vec{q}, t) - \eta \vec{q}^2 \hat{\vec{v}}(\vec{q}, t) + \hat{\vec{f}}(\vec{q}, t) \quad (13)$$

geschrieben werden kann.

Zusätzlich gilt für inkompressible Flüssigkeiten (vgl. Gl. (B.1.8))

$$i \vec{q} \cdot \hat{\vec{v}}(\vec{q}, t) = 0. \quad (14)$$

§3. Zum Anfangszeitpunkt  $t=0$  wird eine ruhende Flüssigkeit vorausgesetzt:

$$\hat{\vec{v}}(\vec{q}, 0) = 0. \quad (15)$$

§4. Die Kraftdichte  $\vec{f}(\vec{r}, t)$  auf die Flüssigkeit entsteht am Ort des gezogenen Kolloids das sich mit Geschwindigkeit  $\vec{U}$  bewegt.

Demnach ist  $\vec{f}(\vec{r}, t)$  von der Form

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{f}_n(\vec{r} - \vec{U}t) \quad (16)$$

und daher

$$\begin{aligned} \hat{\vec{f}}(\vec{q}, t) &= \int d^3r \vec{f}(\vec{r}, t) \exp(-i \vec{q} \cdot \vec{r}) \\ &= \int d^3r \vec{f}_n(\vec{r} - \vec{U}t) \exp(-i \vec{q} \cdot \vec{r}) \\ &= \exp(-i \vec{q} \cdot \vec{U}t) \int d^3r \vec{f}_n(\vec{r} - \vec{U}t) \exp(-i \vec{q} \cdot (\vec{r} - \vec{U}t)) \\ &= \exp(-i \vec{q} \cdot \vec{U}t) \hat{\vec{f}}_n(\vec{q}). \end{aligned} \quad (17)$$

§5. Nach Multiplikation von Gl. (3) mit  $\bar{q}$  ergibt sich mit Gl. (4)

$$0 = -i\bar{q}^2 \hat{p}(\bar{q}, t) + \bar{q} \cdot \hat{f}(\bar{q}, t) \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \hat{p}(\bar{q}, t) = -i \frac{\bar{q} \cdot \hat{f}(\bar{q}, t)}{\bar{q}^2} \quad (9)$$

Dann folgt aus Gl. (3)

$$\begin{aligned} S_m \frac{\partial \hat{v}(\bar{q}, t)}{\partial t} + \gamma \bar{q}^2 \hat{v}(\bar{q}, t) &= \hat{f}(\bar{q}, t) - \bar{q} \frac{\bar{q} \cdot \hat{f}(\bar{q}, t)}{\bar{q}^2} \\ &= \left( \hat{f}_1(\bar{q}) - \bar{q} \frac{\bar{q} \cdot \hat{f}_2(\bar{q})}{\bar{q}^2} \right) \exp(-i\bar{q} \cdot \bar{u} t). \end{aligned} \quad (10)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung für die Anfangsbedingung Gl. (5) ist

$$\hat{v}(\bar{q}, t) = \frac{\hat{f}_1(\bar{q}) - \bar{q} \frac{\bar{q} \cdot \hat{f}_2(\bar{q})}{\bar{q}^2}}{\gamma \bar{q}^2 - i\bar{q} \cdot \bar{u} S_m} \left( \exp(-i\bar{q} \cdot \bar{u} t) - \exp(-\nu \bar{q}^2 t) \right) \quad (11)$$

§6. Wegen Gl. (2) ist

$$\gamma \bar{q}^2 = |\bar{q}| \gamma |\bar{q}| \gg |\bar{q}| \gamma \frac{|\bar{u}|}{\nu} = |\bar{q}| |\bar{u}| S_m \geq |\bar{q} \cdot \bar{u}| S_m \quad (12)$$

also im Nenner von Gl. (11)

$$\gamma \bar{q}^2 - i\bar{q} \cdot \bar{u} S_m \approx \gamma \bar{q}^2 \quad (13)$$

§7. Der Beitrag  $\sim \exp(-\nu \bar{q}^2 t)$  in Gl. (11) beschreibt eine Relaxation auf der Zeitskala (vgl. Gl. (A.2.14))

$$\tau(\bar{q}) = \frac{1}{\nu \bar{q}^2} \ll \frac{\nu}{|\bar{u}|^2} = \frac{L}{|\bar{u}|} \quad (14)$$

Für Zeiten

$$t \gg \frac{L}{|\vec{u}|}$$

(15)

ist die anfängliche Relaxation abgeklungen, sodass dann zusammen mit Gl.(13) das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  durch

$$\begin{aligned}\hat{v}(\vec{q}, t) &\approx \frac{1}{\gamma \vec{q}^2} \left( \hat{f}_n(\vec{q}) - \vec{q} \frac{\vec{q} \cdot \hat{f}_n(\vec{q})}{\vec{q}^2} \right) \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{u} t) \\ &= \frac{1}{\gamma \vec{q}} \left( \hat{f}(\vec{q}, t) - \vec{q} \frac{\vec{q} \cdot \hat{f}(\vec{q}, t)}{\vec{q}^2} \right)\end{aligned}\quad (16)$$

gegeben ist.

§8. An dieser Stelle führt man den Oseen-Tensor mit den Komponenten

$$\hat{T}_{jk}(\vec{q}) := \frac{1}{\gamma \vec{q}^2} \left( \delta_{jk} - \frac{q_j q_k}{\vec{q}^2} \right) \quad (17)$$

ein, sodass Gl.(16) in der Form

$$\hat{v}_j(\vec{q}, t) = \hat{T}_{jk}(\vec{q}) \hat{f}_k(\vec{q}, t) \quad (18)$$

und damit das Geschwindigkeitsfeld als

$$v_j(\vec{r}, t) = \int d^3 r' T_{jk}(\vec{r} - \vec{r}') f_k(\vec{r}', t) \quad (19)$$

mit

$$\begin{aligned}T_{jk}(\vec{r}) &= \frac{1}{(\vec{r} \cdot \vec{r})^3} \int d^3 q \hat{T}_{jk}(\vec{q}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \\ &= \frac{1}{8\pi\gamma|\vec{r}|} \left( \delta_{jk} + \frac{r_j r_k}{|\vec{r}|^2} \right)\end{aligned}\quad (20)$$

geschrieben wird.



§9. Für zwei kolloidale Teilchen A und B an den Positionen  $\vec{r}_A$  und  $\vec{r}_B$  ergibt sich aus Gl. (19)

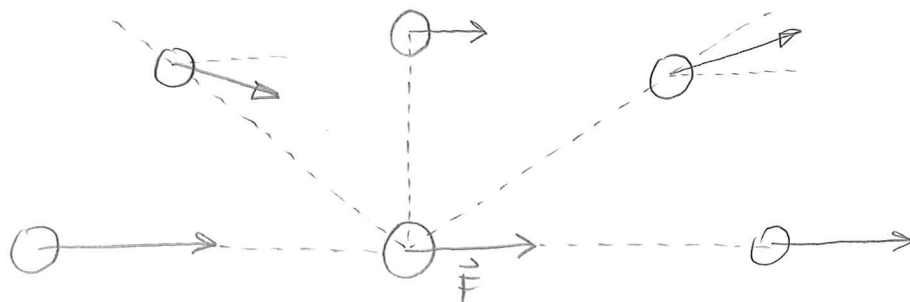
$$\vec{v}_j(\vec{r}_B, t) \approx T_{jk}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \int_{\vec{r}' \approx \vec{r}_A} d^3 r' f_k(\vec{r}') \quad (21)$$

$= \vec{F}_{Ak}$  Kraft auf Teilchen A

falls  $|\vec{r}_B - \vec{r}_A|$  viel größer als der Durchmesser des Kolloids ist (Oseen-Näherung).

Demnach führt die Ausübung einer Kraft  $\vec{F}$  auf ein Kolloid zur Bewegung eines daran im Abstand  $\vec{r}$  befindlichen Kolloids mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{8\pi\eta|\vec{r}|} \left( \vec{F} + \vec{r} \frac{\vec{r} \cdot \vec{F}}{|\vec{r}|^2} \right). \quad (22)$$



§10. Man beachte, dass die hydrodynamische Wechselwirkung Gl. (22) langreichweitig ( $\sim \frac{1}{|\vec{r}|}$ ) ist. Dies gilt aber nur in den Grenzen von §2, d.h. für  $|\vec{r}| \ll L = \frac{\nu}{|\vec{u}|}$ .